PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA - LA MANCHA

JUNIO – 2021

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula razonadamente el determinante de A^t, es decir, la matriz traspuesta de A.

$b)$ Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

$a)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 \Rightarrow \underline{|A^t| = 1}.$$

$b)$

$$X \cdot A + 3 \cdot A = B;\ \ X \cdot A = B - 3A;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (B - 3A) \cdot A^{-1};$$

$$X \cdot I = (B - 3A) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (B - 3A) \cdot A^{-1}}.$$

$$B - 3A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B - 3A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = (B - 3A) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+y+z=a+1 \\ ax+z=a-1 \\ x-y+z=3 \end{array}\right\}$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=0$, si es posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-a+1+a-a=0;\ \ 1-a=0 \Rightarrow a=1.$$

$$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2-3=-5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

b)

Para $a=0$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ z=-1 \\ x-y+z=3 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

$$z=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=6;\ \ x=3;\ \ y=-1.$$

$$\underline{Solución: x=3, y=-1, z=-1}.$$

****

3º) a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $I_1 = \int \frac{2}{3+e^x} \cdot dx$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$).

b) Calcula razonadamente la siguiente integral $I_2 = \int \frac{-x+1}{x^2+3} \cdot dx$.

----

a)

$$I_1 = \int \frac{2}{3+e^x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} e^x = t \\ e^x \cdot dx = dt \\ dx = \frac{1}{t} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{2}{3+t} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int \left(\frac{A}{3+t} + \frac{B}{t} \right) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{t(3+t)} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{t} = \frac{At+3B+Bt}{t(3+t)} = \frac{(A+B)t+3B}{t(3+t)} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} A+B=0 \\ 3B=2 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \frac{2}{3}, A = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \left(\frac{-2/3}{3+t} + \frac{2/3}{t} \right) \cdot dt = -\frac{2}{3} \int \frac{1}{3+t} \cdot dt + \frac{2}{3} \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{2}{3} \cdot Lt - \frac{2}{3} \cdot L(3+t) + C =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot L \frac{t}{3+t} + C \Rightarrow \underline{I_1 = L \sqrt[3]{\left(\frac{e^x}{3+e^x} \right)^2} + C.}$$

b)

$$I_2 = \int \frac{-x+1}{x^2+3} \cdot dx = \int \frac{-x}{x^2+3} \cdot dx + \int \frac{1}{x^2+3} \cdot dx = M + N. \quad (*)$$

$$M = \int \frac{-x}{x^2+3} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+3 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ -x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot Lt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = -\frac{1}{2} \cdot L(x^2+3).$$

$$N = \int \frac{1}{x^2+3} \cdot dx = \int \frac{1}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{3}} = t \\ dx = \sqrt{3} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot arc\ tg\ t + C \Rightarrow N = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$\underline{I_2 = \int \frac{-x+1}{x^2+3} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + C.}$$

****

4º) $a)$ Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcular razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

$b)$ Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in R$ para que las dos rectas sean paralelas.

$a)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

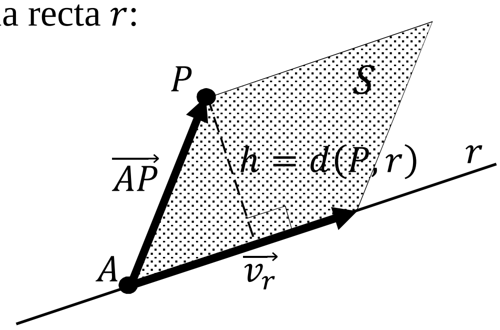
Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

Un punto y un vector director de r son $A(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{c} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow \underline{h = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(1,0,1) - (-1,0,1)] = (2,0,0)$.

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:



$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{|-2j-2k|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2\cdot|-j-k|}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\underline{d(P,r) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ u.}$$

$b)$

Para que dos rectas sean paralelas es necesario que sus vectores directores sean linealmente dependientes.

Vector director de s: $\overrightarrow{v_s} = (2,-2a,2)$; vector director de r: $\overrightarrow{v_r} = (a,-1,1)$.

Dos vectores son linealmente dependientes cuando sus componentes son proporcionales:

$$\frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{a} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

Para que las rectas sean paralelas, pero no coincidentes, tiene que cumplirse que un punto cualquiera de s no pertenezca a t.

Para $a = 1 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

Un punto de s es $Q(0, 1, 0)$.

Vemos si $Q \in t$: $\frac{0-1}{1} \neq \frac{1+1}{-1} = \frac{0-2}{1} \Rightarrow Q \notin t$.

$\underline{Para\ a = 1\ las\ rectas\ s\ y\ t\ son\ paralelas}.$

****

5º) Sean los puntos $A(0,0,1), B(2,1,0), C(1,1,1)\ y\ D(1,1,2)$.

$a)$ Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

$b)$ Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

$a)$

Los puntos $A(0,0,1), B(2,1,0), C(1,1,1)\ y\ D(1,1,2)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,1,0) - (0,0,1)] = (2,1,-1).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (0,0,1)] = (1,1,0).$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,2) - (0,0,1)] = (1,1,1).$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right| \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |2 - 1 + 1 - 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{V_{ABCD} = \frac{1}{6}\ u^2 \cong 0{,}17\ u^2}.$$

$b)$

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC};\ A\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ -y + 2(z-1) - (z-1) + x = 0;$$

$x - y + (z-1)\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv x - y + z - 1 = 0}.$

La recta r pedida tiene como vector director al vector normal del plano.

$\vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1). \qquad D(1,1,2).$

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}}.$$

****

6º) a) Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in R$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $P(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in R$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

----

a)

Por contener al punto $P(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$$f(1) = a \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + b = 2;\;\; a - 2 - 1 + b = 2;\;\; a + b = 5. \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1.$$

Por ser 1 la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $P(1, 2)$ es $f'(1) = 1$.

$$f'(1) = 1 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = 1;\;\; 3a = 6 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

Sustituyendo en (1): $2 + b = 5 \Rightarrow \underline{b = -3}$.

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - ax + 1) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (be^x) = be^0 = b = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{b = 1}.$$

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = \begin{cases} -a & si \ \ x < 0 \\ 1 & si \ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \underline{a = -1}.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = -1\ y\ b = 1.}$

****

7º) a) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si \quad x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & si \;\; 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & si \;\; x > 3 \end{cases}$, determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

----

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{e^{2-2}-1}{2 \cdot 2-4} = \frac{e^0-1}{4-4} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}}{2} =$$

$$= \frac{e^{2-2}}{2} = \frac{e^0}{2} \Rightarrow \underline{\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{1}{2}}.$$

b)

La función $f(x)$ está definida para cualquier valor real de x, excepto para $x = 2$, que anula el denominador de la función, por lo cual: $D(f) \Rightarrow R - \{2\}$.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = 1 \; y \; x = 3$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \; x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2) = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \underline{La \; función \; f(x) \; es \; continua \; en \; x = 1}.$$

$$Para \; x = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{1} = 5 = f(3) \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (2e^x) = 2e^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow \underline{La \; función \; f(x) \; no \; es \; continua \; en \; x = 3}.$$

$$\underline{f(x) \; tiene \; para \; x = 3 \; una \; discontinuidad \; inevitable \; de \; salto \; finito}.$$

****

8º) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar:

a) a_1) ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

a_2) Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo:

b_1) ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las cuatro personas de las fotografías?

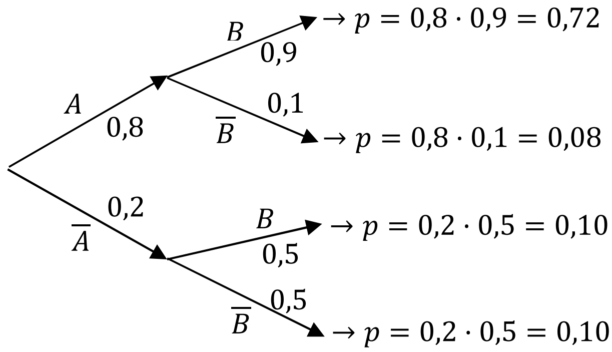
b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

----

a)

$A \rightarrow Comparte\ fotografías\ en\ la\ red.$ $\overline{A} \rightarrow No\ comparte\ fotografías.$

$B \rightarrow Comenta\ fotografías\ en\ la\ red.$ $\overline{B} \rightarrow No\ comenta\ fotografías.$



a_1)

$$P = P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$$

$$= P(A) \cdot P(B/A) + P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}) = 0,8 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,72 + 0,10 = \underline{0,82}.$$

a_2)

$$P = P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B}/A)}{P(A) \cdot P(\overline{B}/A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}/\overline{A})} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,5} =$$

$$= \frac{0,08}{0,08 + 0,10} = \frac{0,08}{0,18} = \underline{0,4444}.$$

$b)$

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 4;\ \ p = 0{,}8;\ \ q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$b_1)\quad P = P(4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 1 \cdot 0{,}4096 \cdot 1 = \underline{0{,}4096}.$

$b_2)\quad P = P(1) + P(2) + P(3) = 1 - P(0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 =$

$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0016 = 1 - 0{,}0016 = \underline{0{,}9984}.$

****